

La Didattica della Matematica *con e per* la scuola. C'è ancora parecchio da fare ...

Bruno D'Amore¹

¹*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá –
NRD, Università di Bologna*

Già in diversi lavori della fine degli anni '80-'90, dichiaravo che, mentre il matematico può fare a meno di interrogarsi sul *senso* degli *oggetti matematici* che usa e sul senso che ha la *conoscenza matematica*, lo studioso di didattica non può farne a meno; per esempio, la cosa è riassunta in D'Amore (1999). Non posso quindi che aver piacere della conferma che trovo in Radford (2004):

«Si può sopravvivere bene facendo matematica senza adottare alcuna esplicita ontologia, cioè una teoria che tratti della natura degli oggetti matematici. (...) La situazione è profondamente diversa quando parliamo di *conoscenza matematica*. (...) Le questioni teoriche circa i contenuti della conoscenza e il modo in cui un contenuto viene trasmesso, acquisito o costruito ci ha condotto al punto in cui non possiamo più a lungo evitare di prendere in seria considerazione l'ontologia».

È precisamente a causa di questa convinzione che ho dedicato molto tempo allo studio della conoscenza concettuale, dopo aver stabilito una credenza ontologica che parte dal *modo* che hanno gli esseri umani di *conoscere* i concetti (D'Amore, 2001a, b; 2003a, b).

Il dibattito è antico e lo si può far risalire alla Grecia classica; ma apprezzo lo sforzo di Radford di riportare il dibattito a termini assai più moderni:

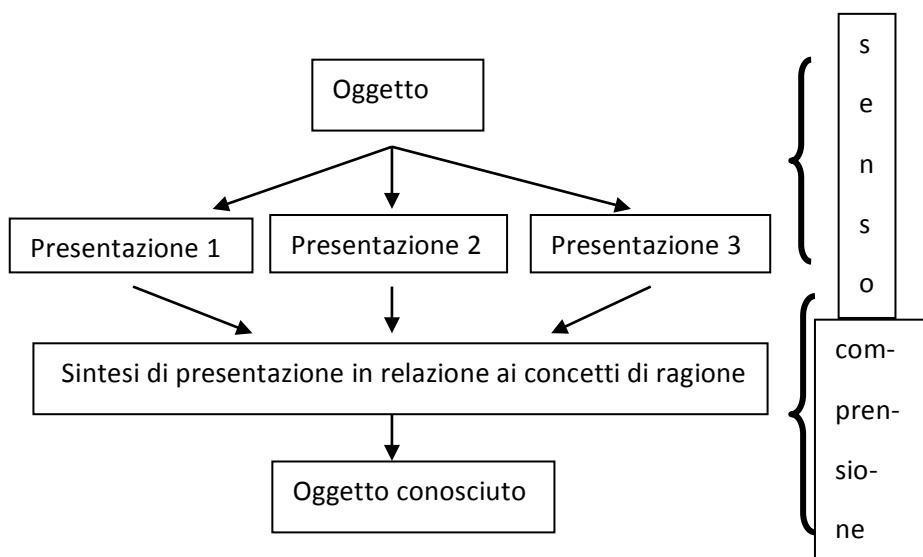
«Gli esseri umani hanno una precedente conoscenza intellettuale dei concetti grazie a un'autonoma attività della mente, indipendentemente dal mondo concreto» (Radford, 2004)

[Radford si riferisce a Pietro Catena (1501-1576), autore di *Universa Loca*, il quale asserì che «gli oggetti matematici erano entità ideali e innate»].

Il dibattito diventa davvero moderno quando si riesce a fare la distinzione tra i “concetti dell'intelletto” (umano) e i “concetti di oggetti”, cioè con la *Critica della ragion pura* di Immanuel Kant (1724-1804):

«[Questi] concetti dell'intelletto puro non sono concetti di oggetti; essi sono schemi logici senza contenuto; la loro funzione è rendere possibile una riorganizzazione o una sintesi delle intuizioni. La sintesi è la responsabilità di ciò che Kant ha identificato come la facoltà cognitiva della conoscenza» (Radford, 2004).

Segue questo grafico che apprezzo molto a causa del tentativo di porre le idee di *senso* e di *comprensione* al loro giusto posto:



Dovendo prendere posizione in questo ambito, per molti di noi la scelta è stata quasi obbligata: approccio antropologico, prima, scelta pragmatista, poi (D'Amore, 2003b, ma anche altrove). Anche in questo caso, mi confortano le asserzioni di Radford:

«In questa linea di pensiero non si può non tener conto di un approccio antropologico; (...) i modi nei quali noi usiamo diversi tipi di segni e di artefatti durante i nostri atti di conoscenza sono sussunti in prototipi culturali di significati mediati (...). Ciò che è rilevante è che l'uso di segni e di artefatti altera le nostre modalità di ricezione degli oggetti del mondo, vale a dire i segni e gli artefatti alterano il modo in cui gli oggetti ci sono dati attraverso i sensi (...). Per ricapitolare, dal punto di vista di un'antropologia epistemologica, il modo nel quale io ritengo che l'enigma degli oggetti matematici possa essere risolto è considerare gli oggetti matematici come modelli fissi di attività incorporati nel regno sempre mutevole della pratica sociale mediata e riflessiva» (Radford, 2004).

Su questa linea c'è una generale condivisione di consenso:

«Gli oggetti matematici devono essere considerati come simboli di unità culturali, emergenti da un sistema di usi legati alle attività matematiche che realizzano gruppi di persone e che dunque evolvono con il trascorrere del tempo. Nella nostra concezione, quel che determina l'emergere progressivo degli "oggetti matematici" è il fatto che, nel seno di certe istituzioni, si realizzino determinati tipi di pratiche e che il "significato" di tali oggetti sia intimamente legato ai problemi affrontati ed alle attività realizzate dagli esseri umani, non potendosi ridurre il significato dell'oggetto matematico alla sua mera definizione matematica» (D'Amore, Godino, 2006).

Tale condivisione viene ulteriormente chiarita da propositi espliciti re nozioni di "significato istituzionale" e "personale" degli oggetti matematici hanno comportato quelle di "pratica personale", "sistema di pratiche personali", "oggetto personale (o mentale)", strumenti utili per lo studio della "cognizione matematica individuale":

«Ciascuna di tali nozioni ha poi un suo versante istituzionale. Fare chiarezza su questi punti è stato necessario per precisare e rendere operative le nozioni di "relazione personale e istituzionale all'oggetto"» (D'Amore, Godino, 2006).

Quel che noi intendiamo per “sistema di pratiche personali” è nella stessa linea dell’approccio semiotico antropologico (ASA) di Radford:

«Nell’approccio semiotico antropologico (ASA) del quale stiamo parlando, l’idealità del concetto dell’oggetto concettuale è direttamente collegata al contesto storico - culturale. L’idealità degli oggetti matematici -cioè ciò che li rende generali- è del tutto tributaria dell’attività umana» (Radford, 2005).

Gli aspetti sociologici di questa aderenza all’attività umana ed alla pratica sociale sono così ribaditi:

«Ritengo che l’apprendimento matematico di un oggetto O da parte di un individuo I all’interno della società S non sia altro che l’adesione di I alle pratiche che gli altri membri di S sviluppano attorno al dato oggetto O» (D’Amore, in D’Amore, Radford, Bagni, 2006)

e:

«le pratiche d’aula possono essere considerate come sistemi di adattamento degli studenti alla società» (Radford, in D’Amore, Radford, Bagni, 2006).

Occorre però giungere a una definizione di questo “oggetto matematico”; noi abbiamo preferito fare ricorso ad una generalizzazione dell’idea di Blumer:

«*Oggetto matematico* (Godino, 2002): tutto ciò che è indicato, segnalato, nominato quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica; l’idea è tratta da Blumer (1969, pag. 8): un oggetto è “tutto quello che può essere indicato, tutto quel che può essere segnalato o al quale possa farsi riferimento”.

Distinti tipi di oggetti matematici di diversi livelli:

“linguaggio” (termini, espressioni, notazioni, grafici, ...) nei vari registri (scritto, orale, gestuale, ...)

“situazioni” (problemi, applicazioni extramatematiche, esercizi, ...)

“azioni” (operazioni, algoritmi, tecniche di calcolo, procedure, ...)

“concetti” (introdotti mediante definizioni o descrizioni) (retta, punto, numero, media, funzione, ...)

“proprietà o attributi degli oggetti” (enunciati sui concetti, ...)

“argomentazioni” (per esempio, quel che si usa per validare o spiegare gli enunciati, per deduzioni o di altro tipo, ...).

A loro volta questi oggetti si organizzano in entità più complesse: sistemi concettuali, teorie...» (D’Amore, Godino, 2006).

Nel lavoro citato, si sfrutta l’idea di:

«*Funzione semiotica*: si dice che si stabilisce tra due oggetti matematici (ostensivi o non ostensivi) una funzione semiotica quando tra i due si determina una dipendenza rappresentazionale o strumentale, cioè uno di essi si può porre al posto dell’altro o uno è usato invece dell’altro» (D’Amore, Godino, 2006).

E, più oltre:

«(...) gli oggetti matematici che intervengono nelle pratiche matematiche e gli emergenti dalle stesse, secondo il gioco linguistico al quale partecipano, possono essere considerati a partire dai seguenti aspetti o dimensioni duali (Godino, 2002):

personale – istituzionale: come abbiamo già rilevato, se i sistemi di pratiche sono condivisi nel seno di una istituzione, gli oggetti emergenti si considerano “oggetti istituzionali”; mentre se questi sistemi sono specifici di una persona li consideriamo come “oggetti personali”;

ostensivi (grafici, simboli, ...) - non ostensivi (quelli che evocano il fare matematica, rappresentati in forma testuale, orale, grafica, gestuale, ...);

estensivo - intensivo: questa dualità risponde alla relazione che si stabilisce tra un oggetto che interviene in un gioco di linguaggio come un caso particolare (un esempio *concreto*,

per esempio la funzione $y=2x+1$) e una classe più generale (*astratta*, per esempio la famiglia di funzioni $y=mx+n$);

elementare – sistemico: in alcune circostanze gli oggetti matematici partecipano come entità unitarie (che si suppone siano conosciute in maniera previa), mentre in altre intervengono come sistemi che vengono scomposti per il loro studio;

espressione – contenuto: antecedente e conseguente di qualsiasi funzione semiotica.

Questi aspetti si presentano raggruppati in coppie che si complementano in modo duale e dialettico. Si considerano come attributi applicabili ai distinti oggetti primari e secondari, dando luogo a distinte “versioni” di tali oggetti» (D’Amore, Godino, 2006).

Se però ci si riferisce alla pratica linguistica di rappresentazione:

«Credo si debbano distinguere due tipologie di oggetti nell’ambito della creazione della competenza matematica (apprendimento matematico): l’oggetto matematico stesso e l’oggetto linguistico che lo esprime» (D’Amore, in D’Amore, Radford, Bagni, 2006).

Nei miei tentativi di sintetizzare le difficoltà di apprendimento dei concetti / della conoscenza degli oggetti, ho spesso fatto uso dell’idea espressa nel *paradosso di Duval*:

«(...) da una parte, l’apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d’altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un’attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l’apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L’impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche» (Duval, 1993, pag. 38).

Queste frasi chiamano fortemente in causa soprattutto un certo modo di concepire l’idea di semiotica.

Anche in questo, mi ritrovo perfettamente in linea con quel che scrive Radford:

«Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere alla conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?» (Radford, 2005).

A proposito della rappresentazione degli oggetti, sfrutto questa felice sintesi di Radford:

«In una celebre lettera scritta il 21 febbraio 1772, Kant mette in dubbio il potere delle nostre rappresentazioni. In questa lettera, inviata a Herz, Kant dice: “su quale fondamento si basa il rapporto tra ciò che chiamiamo rappresentazione e l’oggetto corrispondente?”. (...) In questa lettera, Kant dibatte la questione della legittimità che avrebbero le nostre rappresentazioni nel presentare o rappresentare gli oggetti. In termini semiotici, Kant si interroga sull’adeguatezza del segno. (...) La natura del dubbio kantiano è di ordine epistemologico» (Radford, 2005).

Tutto ciò chiama in causa, in particolar modo, l’idea di segno, giacché per la matematica questa forma di rappresentazione è specifica; il segno è di per sé specificazione del particolare, ma esso può essere interpretato dando senso al

generale; anche in tal caso sfrutto una citazione di Radford:

«Se il matematico ha il diritto di vedere il generale nel particolare, è, come osserva Duval (1951, pag. 110), “perché è certo della fedeltà del segno. Il segno è la rappresentazione adeguata del significato”» (Radford, 2005).

Ma i segni sono artefatti, oggetti a loro volta “linguistici” (in senso lato), termini che hanno lo scopo di rappresentare per indicare:

«(...) oggettivazione indica un processo che ha per scopo di mostrare qualche cosa (un oggetto) a qualcuno. Quali sono i mezzi per mostrare l’oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un’intenzione e per condurre a termine un’azione» (Radford, 2005).

Essi hanno un ruolo molteplice, sul quale non entro per evitare compiti enormi che legano segno - cultura - umanità,

La scelta dei segni, anche e soprattutto quando si compongono in linguaggi, non è neutra o indipendente; essa segna il destino in cui si esprime il pensiero, il destino della comunicazione; per esempio:

«Il linguaggio algebrico impone una sobrietà a chi pensa e si esprime, una sobrietà nei modi di significazione che è stata impensabile prima del Rinascimento. Impone ciò che abbiamo chiamato altrove una *contrazione semiotica*. Presuppone anche la perdita dell’*origo*» (Radford, 2005).

La perdita dell’*origo* (origine, principio) è stata studiata da Radford anche in altri lavori (2000, 2002, 2003).

Ed è proprio su questo punto che si chiude questo mio testo, che è anche il punto di partenza per quanto verrà espresso oralmente nel corso della conferenza generale che ha lo stesso titolo.

Bibliografia

- Blumer H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method*. Inglewood Cliffs NJ: Prentice Hall.
- D’Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Nuova edizione: (2023) Bologna: Bonomo]. [Esiste una versione in lingua spagnola].
- D’Amore B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 15(2), 150-173. [Esiste una versione in lingua spagnola].
- D’Amore B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, 15(1), 4-30. [Esiste una versione in lingua spagnola].
- D’Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, 23(1), 47-51. [Esiste una versione in lingua spagnola].
- D’Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Esistono una versione in lingua spagnola e una in lingua portoghese].
- D’Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche

- cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, 20(4), 557-583.
- D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(1), 7-36. [Esiste una versione in lingua spagnola].
- D'Amore B., Radford L., Bagni G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. [Esiste una versione in lingua spagnola].
- Duval R. (1951). *La métaphysique de Kant*. Paris: PUF.
- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.
- Duval R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels 'apprentissages premiers' de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 8, 13-62.
- Duval R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarche de pensée en mathématiques. Colloque COPIRELEM, Strasbourg, 30 maggio-1 giugno 2006. Atti in corso di stampa. [Esiste una versione in lingua italiana].
- Radford L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, 42(3), 237-268.
- Radford L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, 22(2), 14-23.
- Radford L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.
- Radford L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 18(1), 4-23.
- Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191-213.